

31/03/2016

Δια μέτρα, $\mathbb{F}$ σφδ, $V \neq \{0\}$ διασυντα-
χας πεπερ. διαστάσεως επί του $\mathbb{F}$,
 $e = (e_1, \dots, e_n)$ (διατεταγμεν) βάση του V ,
 $f: V \rightarrow V$ γραμ. απεικόνιση, $A = [f]_e \in \mathbb{F}^{n \times n}$

προσοχή!
ίδια βάση
παιν-κρίση

Υπόδειξη

Ορίσμε το ~~$\chi_A(x)$~~ $\chi_A(x)$ πολυώνυμο ~~$\chi_A(x)$~~
(ελάχιστο ~~πολυνυμίο~~ πολυώνυμο) της f ως εξής
 $\chi_f(x) = \chi_A(x)$ (αφού $m_f(x) = m_A(x)$)

Γίνατε ότι πινάκν όφοια πίνακες έχων
το ίδιο χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο
Ορίσμε μν πολυώνυμν $\chi_f(x)$ και $m_f(x)$
να εξαρτάται από μν επιλογή μν βάσεω e

Ορίσμος

Το $\lambda \in \mathbb{F}$ λέγεται ιδιοτιμή αν f αντιστοιχεί στο $\chi_f(x)$

Π.Χ

Εστω $V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$

και $f: V \rightarrow V$ η γραμμική αντιστοιχία f

$$f(a_0 + a_1x) = (a_0 + 2a_1) + (a_0 + 3a_1)x$$

Βρείτε $\chi_f(x)$, $m_f(x)$ και τις ιδιοτιμές της f

Λύση

Εστω $e = (e_1 = 1, e_2 = x)$. Τότε

Γραμμ. Αλγ. I οι διατετ. Βασίς του

V έχουμε $f(e_1) = f(1) = f(1 + 0x) =$

$$= 1 + 4x = 1e_1 + 4e_2$$

$$f(e_2) = f(x) = f(0 + 1x) =$$

$$= 2 + 3x = 2e_1 + 3e_2 \quad \text{Άρα}$$

αν $A = [f]_e^e$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Εσχαίρ $\chi_f(x) = \chi_A(x) = \det(A - xI_2) =$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές της f είναι

$$\lambda_1 = 5$$

$$\lambda_2 = -1$$

αλγεβρική πολλαπλ.

$\gg \gg 1$

- ποιο είναι το $m_f(x)$; Από τον ορισμό

$$m_f(x) = m_A(x)$$

Από $m_A(x)$ έχουμε πολλαπλό και $m_A(x) = 1$
μηνός παραγόμενος του $\chi_A(x)$ διαφέρει του
 $m_A(x)$, έπεται ότι $m_f(x) = m_A(x) = (x-5)(x+1)$

Σύμβολος

Είσα $f: V \rightarrow V$ γραμμική, σύμβολο
 $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f^2$ κ.λ.π

Εστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ με $a_i \in F$
Σύμβολο με $\text{id}_V : V \rightarrow V$ ως ταυτότητα
αντικείμενο. ~~Εστω~~ $\text{id}_V(w) = w \quad \forall w \in V$.

Φέρει η ταυτότητα είναι γραμμική αντικείμενο
Οπότε ~~Εστω~~ $P(f) = a_0 \cdot \text{id}_V + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n$
που είναι γραμμική αντικείμενο $V \rightarrow V$.

Π.χ Αν $P(x) = 1 + 3x^2$ και $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^V} \rightarrow \mathbb{R}^V$
γραμμική, τότε $P(f) = \text{id}_{\mathbb{R}^V} + 3(f \circ f)$

Προσέγγιση

Εστω $e = (e_1, \dots, e_n)$ βάση $\mathbb{R}^n$ του V
και $f: V \rightarrow V$ γραμμική. Τ.Α. $[f]$

i) η f είναι η μηδενική αντικείμενο. Δηλαδή
 $f(w) = 0_V \quad \forall w \in V$.

$$\text{ii) } [f]_e^e = 0_{n \times n}$$

Απόδειξη

i) = ii) Από f μηδενική ~~Εστω~~

$$F(e_i) = 0_V = 0_{1F} e_1 + 0_{1F} e_2 + \dots + 0_{1F} e_n$$

$$\text{Άρα } [F]_e^e = 0_{n \times n}$$

ii) $\Rightarrow$ i)

(χρειαζόμαστε ότι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων της F ($[F]_e^e$) θα δώσουν τους συντελεστές των $F(e_i)$ ως προς τα e_j).

Αν $[F]_e^e = 0_{n \times n} \Rightarrow$ κάθε συντεταγμένη είναι 0 άρα

$$F(e_i) = 0_{1F} e_1 + \dots + 0_{1F} e_n = 0_V + \dots + 0_V = 0_V$$

Εάν $w \in V$ υπάρχουν (συντεταγμένες) της F ως προς $w = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Άρα F γραμμική
 $F(w) = F(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 F(e_1) + \dots + \lambda_n F(e_n) = \lambda_1 0_V + \dots + \lambda_n 0_V = 0_V$

Άρα αντιστρέφοντας, F είναι η μηδενική γραμμική αντιστροφή.

Υποβιβασμός

$$\text{Από τον γενικό τύπο } [F_1 \circ F_2]_e^e = [F_1]_e^e [F_2]_e^e$$

Που υπολογίζει τον πίνακα σύνθεσης γραμμικών αντιστροφών, είναι ότι αν $K: V \rightarrow V$ είναι $K \geq I$, και $A = [F]_e^e$, τότε $K \geq I$,

$$[F^K]_e^e = A^K$$

Ανάλυση υπάρχει αλγόριθμος για να υπολογιστούν ορισμένες δυνάμεις πίνακα και γραμμικών αντιστροφών.

Πρόταση (Cayley-Hamilton)

Έστω $F: V \rightarrow V$ γραμμική

$\chi_F(F): V \rightarrow V$ είναι η συνδεδεμένη γραμμική

απεικόνιση.

Απόδ.

Έστω ότι το $\mathcal{B} \cdot (C-H)$ για n διανύσματα, την
προσπαθούμε να πάρουμε και την προσπαθούμε να περ-
νάμε.

Π.χ.

Έστω $F: \mathbb{R}[x]$ όπως προηγούμενος άσκηση

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και ~~και~~

~~$\chi_F(x) = x^2 - 4x - 5$~~ exacte στο $\mathbb{R}$ και πρόταση

ou ~~και~~ $\chi_F(F) = F \circ F - 4F - 5 \text{ id}$ είναι

η συνδεδεμένη γραμμική απεικόνιση $V \rightarrow V$

Πρόταση

Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 010101 . Τότε A διαγωνί-
σιμος ^{αυτά και τα δύο} B διαγωνίσιμος

Απόδ.

Exacte ότι i) A διαγωνίσιμος $(\Rightarrow)$ A έχει n δια-
γωνιστικά στοιχεία

ii) A ομοεικόνο n στοιχείων n και n n
μοδουλίας

Το αποτέλεσμα είναι

Ορισμός

Έστω $F: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση του $V = (e_1, \dots, e_n)$ (διατεταγμένη) βάσης του V .
Ορίζεται $A = [F]_e^e \in \mathbb{F}^{n \times n}$ λέγεται F παρα-
στήση αν ο A είναι διαγωνιστός.

Παρατηρήσεις

Από αυτόν τον πρόταση έχουμε ότι η γραμ-
μή F διαγωνιστή είναι τότε οριζήτως διατεταγ-
μένη ανά την επιλογή της βάσης e .
(Ο λόγος είναι ότι αν αλλάζαμε βάση περνούσε
όλο το πλάκα)

Πρόταση

Αν έχουμε δύο ίδιους πίνακες ο ένας είναι
διαγωνιστός αν και μόνο αν ο άλλος είναι.

Ορισμός

Έστω $F: V \rightarrow V$ με καταξιωματικό πολυ-
ώνιο $p_F(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιο-
τιμή της F (δηλ. $\exists$ $x \neq 0$ του V με $F(x) = \lambda x$).

Ορίζεται το ιδιοχώρο $V_F(\lambda)$ ως εξής:

$V_F(\lambda) = \ker(F - \lambda \text{id}_V)$ που είναι υπο-
χώρος του V .

Ορισμός

Έστω $F: V \rightarrow V$ γραμμική, και $v \in V$.
Το v λέγεται ιδιοτιμή αν $F(v) = \lambda v$ και
i) $v \neq 0$ και

ii) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ ώστε $f(v) = \lambda v$

Οπότε αν πολλαπλασιάσουμε με λ^{-1} , τότε έχουμε
αυτὸ ἰδιοτελὲς τὸ f καὶ $v \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)$
Επομένως, αντιστοίχως f αν πολλαπλασιάσουμε με
κλίμακα λ^{-1} τότε θα εἶναι:

Πρόταση

Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμικὴ $\lambda \in \mathbb{F}$ T.A.E.T.

i) λ ἰδιοτελὲς τὸ f

ii) H γράφει $f - \lambda \text{id}_V$ ἂν ἢ καὶ 1-1

iii) H γράφει $f - \lambda \text{id}_V$ ἂν ἢ καὶ m

Πρόταση

Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμικὴ T.A.E.T.

i) f διαγωνιστὴς

ii) Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)$ αντιστοιχεί
στο $\mathbb{F}[x]$ καὶ γράφει διακρίσεων πρώτο-
βάθμια

iii) Υπάρχει βάση $\{g_1, \dots, g_r\}$ ὥστε
κάθε g_i εἶναι ἰδιοδιανυσματὸς τὸ f

Παρατήρηση

Αν $f: V \rightarrow V$ διαγωνιστὴς καὶ $g = (g_1, \dots, g_r)$
ὥστε ὡς (iii), $\forall i \exists \lambda_i \in \mathbb{F}$ π.

$f(g_i) = \lambda_i f$ καὶ $[f]_g = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$

Ἀρα καὶ i), ii), iii) ἔχουν ισοδυναμία π. το
iv) Υπάρχει βάση $g_1, \dots, g_r$ τοῦ V ὥστε
 $[f]_g$ ἔχει διαγώνια

Φ2 #3

Άσκηση 5.

Βρείτε $x, y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ώστε

$$x^2 = y^3 = A, \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Av $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $Z = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix}$ τότε

$$Z^2 = D \text{ και αν } Q = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{1} \end{pmatrix} \text{ τότε}$$

$$Q^3 = D.$$

Υπάρχει $(P^{-1} Z P)^k = P^{-1} Z^k P$

Λύση

Βήμα 1ο

(A διαγωνιστός)

Εξάγεται $\chi_A(x) = \dots = -(x-1)(x-4)(x-9)$

Άρα A διαγωνιστός

Βήμα 2ο

Υπολογισμός των $V_A(1), V_A(4), V_A(9)$. Μετά να
 προσφέρω $V_A(1)$ την βάση $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$V_A(4) \text{ " " " } e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_A(1) \text{ " " " } e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα στο σπινόμενο έχουμε $P = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} A P = D \text{ με } D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Μετα ως ποσότητες}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ερωτ } X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ερωτ } X_1^2 = D = P^{-1} A P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P X_1^2 P^{-1} = A \Rightarrow (P X_1 P^{-1})^2 = A$$

$$\text{Ορατ } X = P X_1 P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Τότε } X^2 = A$$

$$\text{Για το } Y \text{ Ορατ } Y_1 = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{1} \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$Y = P Y_1 P^{-1} \text{ Τότε } Y^3 = A$$

Φορ #3

② Ερωτ $a, b \in \mathbb{R}$ και $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα:

$$T(x, y, z) = (2x, 2y + az, 3x + bz)$$

για $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Νομίζω καλύτερα απαντάει να αναπαράγει τα

$a, b \in \mathbb{R}$ ώστε η γραμμική απεικόνιση

Νομίζω

$$\text{Ερωτ } T = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$$

η καλούμε B τον $\mathbb{R}^3$. Οπότε $A = [T]_B^B$
 Οπότε $T(e_1) = T(1, 0, 0) = (2, 0, 3) =$
 $= 2e_1 + 0e_2 + 3e_3$

(Οπότε $A = [T]_B^B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 2, 0) = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 6) = 0e_1 + 0e_2 + 6e_3$$

Από άσκηση 7 διαπιστώνουμε ότι η A διαγωνίζεται
 στον $\mathbb{R}$ και πως αν A διαγωνιστεί
 τότε (on $\mathbb{R}$). Οπότε

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 3 & 0 & 6-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x) \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 3 & 6-x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-2)^2(x-6)$$

Από παρατήρησης $6 \neq 2$ και $6 = 2$

Παρατήρηση 1 $6 \neq 2$

Ιδιοτιμή	Αλλ. ποσ.	Γεωμ. ποσ.
2	2	1
6	1	1

Από άσκηση 9 για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 6$ από
 αλγ. ποσ. $(\lambda_2 \neq 1$ και ποσ.

$$1 \leq \text{γεωμ. ποσ.}(\lambda_2) \leq \text{αλγ. ποσ.}(\lambda_2)$$

$$\Rightarrow \text{γεωμ. ποσ.}(\lambda_2) = 1$$

$\forall \lambda \neq 2 \quad V_A(2)$
 $(A - 2 \cdot I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (=)$

$(=) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 6-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (=)$

$(=) \begin{cases} a \cdot z = 0 & \text{Αν } a \neq 0 \\ 3x + (6-2)z = 0 \end{cases}$

$V_A(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \text{ και } \dim V_A(2) = 1$

δηλ έχει πολλαπλότητα $(2, 1) = 1 \Rightarrow \notin \text{ox}_1$

Αν $a = 0$, τότε $V_A(2) = \left\{ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} : \begin{matrix} \text{διεξιν.} \\ (6-2)z \\ 3 \end{matrix} \right\}$

$y, z \in \mathbb{R}$ με την διεστραύ 2, εποχ $\dim V_A(2) = 2$
 $\Rightarrow \notin \text{διγωνιστωση}$

περιπτ. $b = 2$

Ιδιοτιμές	Αξ. πολ	Γεν. μορ
$\lambda_1 = 2$	3	

(Άλλα ως ποίητες) $\begin{cases} a \cdot z = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$

Αρα

αν $b = 2$ και $a = 0$ ΦΑΝ

αν $b = 2$ και $a \neq 0$

$$V_A(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} : z, y, \in \mathbb{R} \right\} \text{ now rank dimension } 2$$

$$V_A(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \text{ now rank dimension } 1$$

Defn 2.

Apn $6 \neq 2$, $a = 0$ dimension 2

$6 \neq 2$, $a \neq 0$ dimension 1

$6 = 2$, 0×1 dimension 0

$$B \in \mathbb{F}^{n \times k} \quad F_B: \mathbb{F}^{k \times 1} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times 1}$$

$$\text{Defn } F_B \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right) = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

If F_B mapping then ~~Defn~~

$$(1) \text{ Rank of } F_B = \dim \text{Im } F_B = \text{Rank of } (B) \quad (1)$$

$$(2) \dim \text{Im } F_B = \dim \mathbb{F}^{n \times 1} - \dim \text{ker } F_B \quad (2)$$

$$(3) \Rightarrow \dim \text{ker } F_B = \dim \mathbb{F}^{k \times 1} - \dim \text{Im } F_B = \quad (1)$$

$$k - \text{Rank of } (B)$$

4 (4)

Exm: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ rank $m > n$ Uninvertible

$$A^m = \mathbb{O}_{n \times n} \quad \Delta.0 \quad A^n = \mathbb{O}_{n \times n}$$

$$(n \times A, A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ rank } A^{2016} = \mathbb{O}_{3 \times 3} \Rightarrow)$$

$$A^3 = \mathbb{O}_{3 \times 3})$$

Ans: 4

Exm $m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ so char poly of A

Εξαιτίας $1 \leq \deg m_A(x) \leq \deg \chi_A(x) = n$

α-τομή $p(x) = x^n$. (Εξαιτίας $p(x)$ ανήκει στην $\mathbb{F}[x]$ τον A (και τον $m_A(x)$) A και $m_A(x)$ διαίρεται το $p(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$ και το $m_A(x)$ διαίρεται το x^n

Αρα $\exists t \in \mathbb{N}$ $1 \leq t \leq n$ ώστε

$m_A(x) = x^t$ Αρα $\deg m_A(x) \leq n \Rightarrow$

$t \leq n$ Αρα $m_A(A) = 0_{n \times n} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^t = 0_{n \times n}$ και αφού $t \leq n \Rightarrow A^n = 0_{n \times n}$